
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE - A. VENNI

UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SINGOLARE IN SPAZI DI BANACH

21 FEBBRAIO 1985

1. INTRODUZIONE

In questo seminario vengono esposti alcuni risultati da noi recentemente ottenuti in [DV] e riguardanti proprietà globali su \mathbb{R}^+ delle soluzioni dell'equazione differenziale singolare

$$(1.1) \quad tu'(t) + Au(t) = f(t) \quad 0 < t < +\infty$$

dove f, u sono funzioni da \mathbb{R}^+ in uno spazio di Banach complesso E e $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow E$ è un operatore lineare chiuso con $\mathcal{D}(A) \subseteq E$, sul quale verranno fatte opportune ipotesi.

I più recenti contributi allo studio dell'equazione (1.1) sono i lavori di Lewis-Parenti e Coppoletta citati in bibliografia [LP],[C]. In [LP] (dove viene studiata anche la versione non autonoma di (1.1), in un intervallo limitato) E è uno spazio di Hilbert e le ipotesi su A sono simili alle nostre. La tecnica usata si basa sulla trasformazione di Mellin e su un risultato di J.T. Schwartz sui moltiplicatori della trasformazione di Fourier in ambito hilbertiano. In [C] viene studiata l'equazione non autonoma in un intervallo limitato. Le ipotesi sugli operatori $A(t)$ sono di tipo "iperbolico" (nel senso che essi generano semigrupp*i* di classe C_0) e le tecniche sono ispirate alla "parte iperbolica" del lavoro di Da Prato-Grisvard [DPG].

Le nostre tecniche si ispirano alla "parte parabolica" del medesimo lavoro che riproduce essenzialmente idee di Grisvard (v.[G]). Essenzialmente si cerca di invertire (in qualche senso da precisare) l'operatore $u \rightarrow tu' + Au$ integrando lungo una curva opportuna i risolvendi degli operatori $u \rightarrow tu'$ e $u \rightarrow Au$. A tale scopo si scrive l'equazione nella forma

$$(1.2) \quad (Q - G)u = f$$

dove Q e G sono gli operatori definiti da

$$\mathcal{D}(Q) = \{u \in X; u(t) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, t \rightarrow Au(t) \text{ appartiene a } X\}$$

$$(Qu)(t) = Au(t)$$

$$\mathcal{D}(G) = \{u \in X; t \rightarrow tu'(t) \text{ appartiene a } X\}, (Gu)(t) = -tu'(t)$$

Qui X è uno spazio di Banach contenuto in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, E)$, e la derivata è intesa nel senso delle distribuzioni a valori in E.

Poiché le proprietà spettrali di Q (come operatore in X) si deducono da quelle di A (come operatore in E), che verranno precisate in seguito, nel prossimo paragrafo studieremo le proprietà di G. Precisiamo ora quali sono gli spazi $X \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, E)$ che ci interessano.

(a) Spazi "di ordine 0"

$$(a_1) \quad L^p(\mathbb{R}^+; E) \quad (1 \leq p \leq \infty) \text{ con la norma usuale}$$

$$(a_2) \quad \text{i seguenti sottospazi chiusi di } L^\infty(\mathbb{R}^+; E):$$

$$C(\mathbb{R}^+; E) \text{ (funzioni continue e limitate)}$$

$$C(R_0^+; E) \text{ (funzioni di } C(\mathbb{R}^+, E) \text{ che convergono per } t \rightarrow 0^+)$$

$$C(R_\infty^+; E) \text{ (funzioni di } C(\mathbb{R}^+, E) \text{ che convergono per } t \rightarrow +\infty)$$

$$C(R_{0,\infty}^+; E) = C(R_0^+, E) \cap C(R_\infty^+, E)$$

(b) Spazi di ordine $k \in \mathbb{N}$

Sono gli spazi del tipo $\{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; E), f^{(j)} \in X \text{ per } 0 \leq j \leq k\}$ dove X è uno spazio di ordine 0. Saranno denotati con $W^{k,p}$ e con C^k

2. L'OPERATORE G ($Gu = -tu'$)

C'interessa studiare le proprietà di G relative a

- 1) densità di $\mathcal{D}(G)$ in X
- 2) spettro e risolvente
- 3) interpolazione tra $\mathcal{D}(G)$ e X

(E' inteso che G si considera come un operatore in X e non in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+; E)$).

Lo studio delle proprietà d'interpolazione risulterà utile per ottenere risultati di regolarità delle soluzioni.

Il problema 1) è completamente risolto dal risultato seguente:

Teorema 2.1. $\mathcal{D}(G)$ è denso in X quando

$$(a) X = W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E) \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$(b) X = C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; E) \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

e non lo è negli altri casi.

Per quanto riguarda 2), $\sigma(G)$ e $R(\lambda; G) = (\lambda I - G)^{-1}$ si calcolano esplicitamente. Poniamo $\alpha = \frac{1}{p}$ (è inteso che per gli spazi C^k , $\alpha = 0$)

Teorema 2.2. Se X è di ordine k e α è come sopra, allora $\sigma(G)$ è la striscia $\{\lambda \in \mathbb{C}; \alpha - k \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha\}$. Inoltre

$$(a) \text{ per } \operatorname{Re} \lambda > \alpha \quad (R(\lambda; G)f)(t) = t^{-\lambda} \int_0^t s^{\lambda-1} f(s) ds \quad e$$

$$\|R(\lambda; G)\| \leq (\operatorname{Re} \lambda - \alpha)^{-1}$$

$$(b) \text{ per } \operatorname{Re} \lambda < \alpha - k \quad (R(\lambda; G)f)(t) = -t^{-\lambda} \int_t^\infty s^{\lambda-1} f(s) ds \quad e$$

$$\|R(\lambda; G)\| \leq (\alpha - k - \operatorname{Re} \lambda)^{-1}$$

Osserviamo che in base al teorema di Hille-Yosida, dal teor. 2.2 segue che quando $\mathcal{D}(G)$ è denso in X , G è il generatore infinitesimale di un gruppo di classe C_0 di operatori lineari continui in X . Tale gruppo è definito da $(\exp(tG)u)(s) = u(s e^{-t})$.

Per caratterizzare gli spazi d'interpolazione tra $\mathcal{D}(G)$ e X , supponiamo anzitutto che X sia di ordine 0. Se $X = L^p(\mathbb{R}^+; E)$ con $1 \leq p < \infty$ si dimostra che per $0 < \theta < 1$ $(X, \mathcal{D}(G))_{\theta, p}$ è lo spazio delle $f \in X$ tali che $t \rightarrow t^\theta f(t)$ sta in $W^{\theta, p}(\mathbb{R}^+; E)$ e la norma su $(X, \mathcal{D}(G))_{\theta, p}$ è equivalente

$$a f \rightarrow \left(\int_0^\infty (\|f(t)\|)^p + \int_0^\infty \frac{\|s^\theta f(s) - t^\theta f(t)\|^p}{|s-t|^{1+\theta p}} ds dt \right)^{1/p}. \text{ Se } X \text{ è } L^\infty(\mathbb{R}^+; E) \text{ o}$$

uno spazio C , allora $(X, \mathcal{D}(G))_{\theta, \infty}$ è lo spazio delle $f \in X$ tali che $t \rightarrow t^\theta f(t)$ sia hölderiana di esponente θ uniformemente su \mathbb{R}^+ (e la norma è quella naturale). In questo caso interessa anche caratterizzare la chiusura di $\mathcal{D}(G)$ in $(X, \mathcal{D}(G))_{\theta, \infty}$: si ottiene che $\overline{\mathcal{D}(G)}^{\theta, \infty}$ coincide con lo spazio delle $f \in (X, \mathcal{D}(G))_{\theta, \infty}$ tali che

$$\lim_{\delta \rightarrow 1+} \text{ess sup}_{t, s > 0, \delta^{-1} < \frac{s}{t} < \delta} \frac{\|s^\theta f(s) - t^\theta f(t)\|}{|s-t|^\theta} < \varepsilon$$

Se poi X_m è uno spazio di ordine $m > 0$ e X_0 è il corrispondente spazio di ordine 0, chiamati G_m e G_0 i relativi operatori, si ha che $(X_m, \mathcal{D}(G_m))_{\theta, p} = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; E); f^{(j)} \in (X_0, \mathcal{D}(G_0))_{\theta, p} \text{ per } 0 \leq j \leq m\}$ e analogamente si caratterizza $\overline{\mathcal{D}(G_m)}^{\theta, \infty}$.

3. L'EQUAZIONE OPERATORIALE $(Q-G)u = f$

Studiamo l'equazione $(Q-G)u = f$ in uno spazio di Banach complesso X , sotto le seguenti ipotesi:

- (3.1) Esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\beta \leq \alpha$), $L \geq 1$ $M > 1$ tali che la striscia
 $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \beta \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha\}$ contiene $\sigma(G)$ ed è contenuta in $\rho(Q)$;

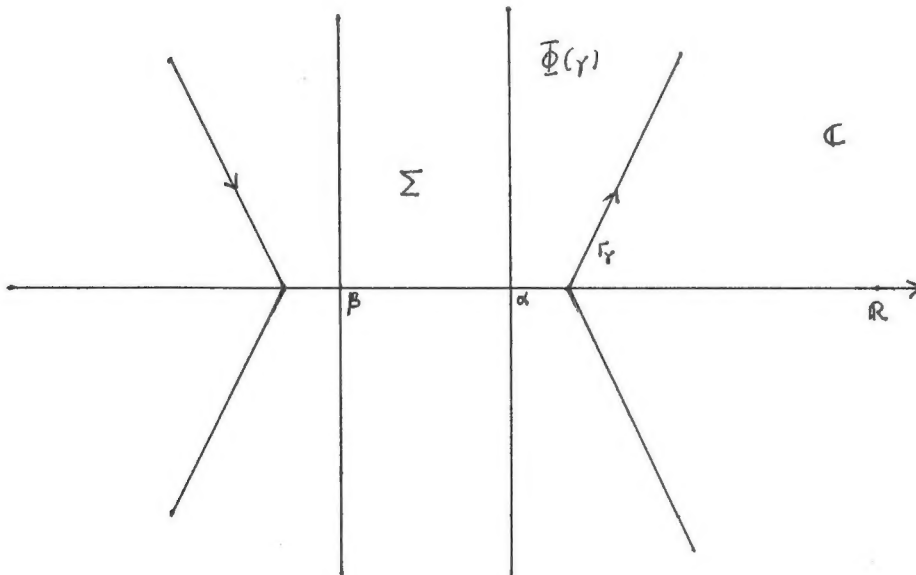
inoltre

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma \quad \|R(\lambda; G)\| \leq L(\operatorname{dist}(\lambda; \Sigma))^{-1}$$

$$\forall \lambda \in \Sigma \quad \|R(\lambda; Q)\| \leq M(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)^{-1}$$

- (3.2) $R(\lambda; G)$ commuta con $R(\mu; Q)$ per $\lambda \in \rho(G)$, $\mu \in \rho(Q)$

In base alle stime usuali sul risolvente, da (3.1) si deduce che



per $0 < \gamma < \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$ l'insieme $\Phi(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \beta - \gamma(1 + |\operatorname{Im} \lambda|) < \operatorname{Re} \lambda < \alpha + \gamma(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)\}$ è contenuto in $\rho(Q)$, e su di esso vale la stima

$$\|R(\lambda; Q)\| \leq \frac{C_\gamma}{1 + |\operatorname{Im} \lambda|} \quad (\text{con } C_\gamma = \frac{M}{1 - \gamma \sqrt{M^2 - 1}})$$

Chiameremo Γ_γ la frontiera di $\Phi(\gamma)$ orientata "in senso antiorario". Distingueremo tra soluzioni strette e soluzioni forti dell'equazione (1.2) secondo la definizione di [DPG]: u è soluzione stretta di (1.2) se (u, f) appartiene al grafico di $Q-G$, cioè $u \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(G)$ e $Qu - Gu = f$; u è soluzione forte se (u, f) appartiene alla chiusura del grafico di $Q-G$. È chiaro che per evitare patologie, le soluzioni forti saranno interessanti solo quando $Q-G$ è chiudibile.

L'operatore $S = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\gamma} R(\lambda; G)R(\lambda; Q) d\lambda$ avrà un ruolo fondamentale.

Si prova facilmente che l'integrale converge assolutamente in $L(X)$ e non dipende da γ . Inoltre:

Teorema 3.1.

- (a) $\forall x \in \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(Q) \quad S(Q-G)x = x$
- (b) $\forall \theta \in]0, 1[\quad \forall p \in [1, \infty] \quad \forall x \in (X, \mathcal{D}(G))_{\theta, p} + (X, \mathcal{D}(Q))_{\theta, p}$
 $Sx \in \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(Q)$ e $(Q-G)Sx = x$
- (c) $Q-G$ è chiudibile e $\forall x \in \overline{\mathcal{D}(Q-G)} \quad S(\overline{Q-G})x = x$.
- (d) $\forall y \in \overline{\mathcal{D}(Q) + \mathcal{D}(G)} \quad Sy \in \overline{\mathcal{D}(Q-G) \cap \overline{\mathcal{D}(Q) + \mathcal{D}(G)}}$ e $(\overline{Q-G})Sy = y$

In altre parole, l'equazione (1.2) ha al più una soluzione forte (per (c)); tale soluzione forte esiste $\forall f \in \overline{\mathcal{D}(Q) + \mathcal{D}(G)}$ (per (d)) ed

è stretta $\forall f \in \bigcup_{1 \leq p \leq \infty} \bigcup_{0 < \theta < 1} ((X, \mathcal{D}))_{\theta, p} + (X, \mathcal{D}(Q))_{\theta, p}$ (per (b)).

Si ottiene anche il seguente risultato di regolarità per l'operatore S

Teorema 3.2. Sia $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Allora GS e QS (v. teor. 3.1 (b)) sono entrambi continui da $(X, \mathcal{D}(Q))_{\theta, p}$ in sé, da $(X, \mathcal{D}(G))_{\theta, p}$ in sé, da $\overline{\mathcal{D}(G)}^{\theta, \infty}$ in sé e da $\overline{\mathcal{D}(Q)}^{\theta, \infty}$ in sé.

4. APPLICAZIONE ALL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Torniamo all'operatore $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow E$. Sia X uno degli spazi elencati al § 1 e $Q: \mathcal{D}(Q) \rightarrow X$ l'operatore $(Qu)(t) = A(u(t))$ ivi precisamente definito. E' facile vedere che $\rho(A) \subseteq \rho(Q)$ e $\forall \lambda \in \rho(A)$ $(R(\lambda; Q)u)(t) = (R(\lambda; A)u)(t) \forall u \in X$, cosicché $\|R(\lambda; Q)\|_{L(X)} \leq \|R(\lambda; A)\|_{L(E)}$. Pertanto ipotesi su A del tipo che in (3.1) riguardano Q implicano le medesime ipotesi su Q .

Per le ipotesi su G (che qui è l'operatore studiato nel § 2) che appaiono in (3.1), si veda il § 2. Vale anche (3.2) (perché A non dipende da t).

Per applicare compiutamente la "teoria astratta" sviluppata nel § 3 occorre caratterizzare gli spazi $(X, \mathcal{D}(Q))_{\theta, p}$. Inoltre sarà interessante sapere quando $\mathcal{D}(G) + \mathcal{D}(Q)$ è denso in X (v. ter. 3.1 (d)). Occupiamoci subito di quest'ultimo problema.

In tutti i casi in cui $\mathcal{D}(G)$ è denso in X (v. teor. 2.1) ovviamente lo è anche $\mathcal{D}(G) + \mathcal{D}(Q)$. Si potrebbe pensare, allora, che se $\mathcal{D}(A)$ è denso in E , $\mathcal{D}(Q)$ sia denso in X . Purtroppo non soltanto ciò è vero solo per quegli stessi spazi per cui $\overline{\mathcal{D}(G)} = X$, ma in base all'esempio 5.9 di

[DV] per gli spazi del tipo $W^{k,\infty}$, $C^k(\mathbb{R}^+, E)$, $C^k(\mathbb{R}_0^+, E)$, $C^k(\mathbb{R}_\infty^+, E)$ nemmeno $\mathcal{D}(G) + \mathcal{D}(Q)$ è denso in X .

Per caratterizzare gli spazi $(X, \mathcal{D}(Q))_{\theta,p}$ distinguiamo i "casi buoni" ($X = W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E)$ con $p < \infty$, $X = C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; E)$) da quelli "cattivi" (tutti gli altri). In tutti i casi $\mathcal{D}(Q)$ coincide con lo spazio corrispondente a X , dove al posto di E si deve mettere $\mathcal{D}(A)$ (con la norma del grafico). Se $X = W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E)$ si ha che $(X, \mathcal{D}(Q))_{\theta,p} = W^{k,p}(\mathbb{R}^+; (E, \mathcal{D}(A))_{\theta,p})$. Se $X = C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; E)$ si ha che $\overline{\mathcal{D}(Q)}_{\theta,\infty} = C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; \overline{\mathcal{D}(A)}_{\theta,\infty})$. Nei casi cattivi tutto ciò che si può dire è che $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^+; (E, \mathcal{D}(A))_{\theta,\infty})$ è un sottospazio chiuso di $(X, \mathcal{D}(Q))_{\theta,\infty}$ (con $X = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^+; E)$) e che $C^k(I; (E, \mathcal{D}(A))_{\theta,\infty})$ è un sottospazio chiuso di $(X, \mathcal{D}(Q))_{\theta,\infty}$ con $I \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_\infty^+\}$ e $X = C^k(I, E)$.

Applicando il teor. 3.1 si ottengono i seguenti risultati, dove

$$\sum_{k,p} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \frac{1}{p} - k \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{1}{p} \right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema 4.1. Supponiamo che $\sum_{k,p} \subseteq \rho(A)$ (per certi $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in [1, \infty[$) e che $\sup_{k,p} \|R(\lambda; A)\| \leq M(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)^{-1}$ (con $M > 1$).

Allora:

- $\forall f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E)$ l'equazione (1.1) ha un'unica soluzione forte in $W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E)$
- Se $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E)$ ed $\exists \theta \in]0, 1[$ [tale che $t \rightarrow t^\theta f^{(j)}(t)$ ($0 \leq j \leq k$) sta in $W^{\theta,p}(\mathbb{R}^+; E)$, allora la soluzione è stretta e la medesima regolarità di f hanno le funzioni tu' e Au
- Se $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^+; (E, \mathcal{D}(A))_{\theta,p})$ per qualche $\theta \in]0, 1[$, allora la soluzione è stretta e la medesima regolarità di f hanno tu' e Au .

Teorema 4.2. Sia $\Sigma_{k,\infty} \subseteq \rho(A)$ (per un certo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) e su $\Sigma_{k,\infty}$ si abbia $\|R(\lambda; A)\| \leq M(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)^{-1}$. Allora:

- (a) $f \in C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; E)$ l'equazione (1.1) ha un'unica soluzione forte in $C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; E)$
- (b) Se $f \in C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; E)$ ed $\exists \theta \in]0, 1[$ tale che per $0 \leq j \leq k$ $t \rightarrow t^{\theta f^{(j)}}(t)$ è uniformemente Hölderiana di esponente θ su \mathbb{R}^+ , allora la soluzione è stretta, e tu' , Au hanno la stessa regolarità di f .
Se poi per $0 \leq j \leq k$

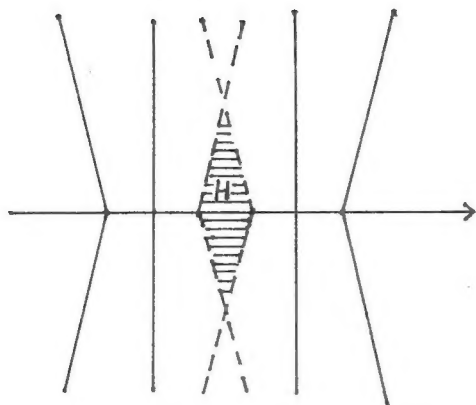
$$\lim_{\delta \rightarrow 1+} \sup_{\delta^{-1} \leq \frac{s}{t} \leq \delta} \frac{|t^{\theta f^{(j)}}(t) - s^{\theta f^{(j)}}(s)|_E}{|s-t|^\theta} = 0$$

allora tu' e Au hanno la medesima regolarità

- (c) Se $f \in C^k(\mathbb{R}_{0,\infty}^+; \overline{\mathcal{D}(A)}^{\theta, \infty})$, allora la soluzione è stretta e allo stesso spazio appartengono le funzioni tu' e Au .

Risultati un po' meno eleganti si ottengono nei "casi cattivi", applicando i teoremi 3.1 e 3.2.

Per concludere vediamo cosa succede se, invece di supporre $\Sigma_{k,p} \subseteq \rho(A)$ supponiamo soltanto $\partial \Sigma_{k,p} \subseteq \rho(A)$, oltre alla decrescenza del risolvente. Allora si vede facilmente che in realtà $\Sigma_{k,p} \cap \rho(A) = H$ è compatto e che la stima sul risolvente vale in $\Sigma_{k,p}$ per $|\operatorname{Im} \lambda| \rightarrow +\infty$.



Mediante un integrale di Dunford attorno a H si scompone E nella somma diretta di due sottospazi chiusi E_1 ed E_2 tali che su E_1 l'operatore A gode delle proprietà sotto le quali si è appena studiata l'equazione, mentre su E_2 A è un operatore limitato, con $\sigma(A) = H$. E' chiaro che ci si ri-

duce allora a studiare (1.1) sotto l'ipotesi $A \in L(E)$. In tal caso è ovvio che ogni soluzione di (1.1) è stretta, e se $f \in L^p(\mathbb{R}^+; E)$ si prova che l'unica soluzione in $L^p(\mathbb{R}^+; E)$ è

$$u(t) = -t^{-A} \int_t^\infty s^{A-1} f(s) ds$$

(ricordiamo che in ogni caso $\frac{1}{p} - k < \min_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda \leq \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda < \frac{1}{p}$).

Se poi $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E)$ si dimostra che la soluzione sopra scritta sta in $W^{k,p}(\mathbb{R}^+; E)$ se e solo se vale una certa complicata condizione di compatibilità su f , la quale, in casi particolarmente favorevoli (p. es. $f = 0$ in un intorno di $+\infty$) si riduce a

$$\int_0^\infty s^{A+k-1} f^{(k)}(s) ds = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

- [C] G. COPPOLETTA: Abstract Singular Evolution Equations of "Hyperbolic" Type. JFA 50 (1983), 50-66.
- [DPG] G. DA PRATO, P. GRISVARD: Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. JMPA 54 (1975), 305-387.
- [DV] G. DORE, A. VENNI: On a Singular Evolution Equation in Banach Spaces. JFA 64 (1985), 227-250.
- [G] P. GRISVARD: Equations différentielles abstraites. Ann.Sci. ENS (4) 2 (1969), 311-395.
- [LP] J.E. LEWIS, C. PARENTI: Abstract Singular Parabolic Equations. Comm. PDE 7 (1982), 279-324.